~ CURS 6 ~

5. Legi și relații generale în electromagnetism

5.1. Legea circuitului magnetic

A. Forma generală integrală

Enunț: Tensiunea magnetomotoare produsă în lungul unei curbe închise (Γ) este întotdeauna egală cu suma dintre intensitatea curentului electric de conducție ce străbate orice suprafață deschisă (S_Γ) mărginită de această curbă și viteza de creștere în timp a fluxului electric prin aceeași suprafață:

$$u_{mm\Gamma} = i_{S_\Gamma} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_{S_\Gamma}$$

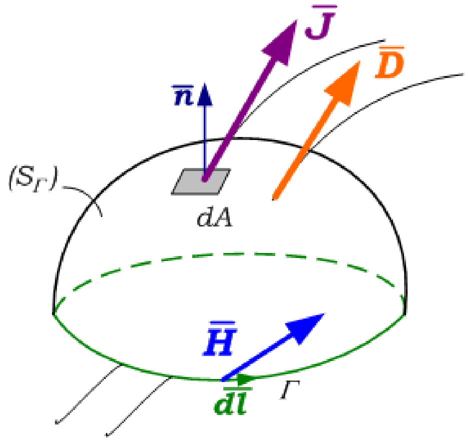

Fig. 5.1. Explicativă pentru legea circuitului magnetic.

în forma integrală se poate scrie:

$$\oint_\Gamma \overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{dl}} = \int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{J}}\overline{\mathbf{n}}dA + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{D}}\overline{\mathbf{n}}dA$$

Membrul drept este o derivată de flux ce poate fi atașată unei suprafețe ce se deplasează cu viteza $\overline{\mathbf{v}}$, astfel încât termenul poate fi dezvoltat:

$$\oint_\Gamma \overline{\mathbf{H}}\cdot\overline{\mathbf{dl}} = \int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{J}}\cdot\overline{\mathbf{n}}dA + \int_{S_\Gamma}\left[\frac{\partial \overline{\mathbf{D}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}}div\overline{\mathbf{D}} + rot\left(\overline{\mathbf{D}}\times\overline{\mathbf{v}}\right)\right]\overline{\mathbf{n}}dA$$

Fiecare dintre termenii membrului drept poartă o denumire specifică:

$i_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{J}}\overline{\mathbf{n}}dA$ – curentul electric de conducție;

$i_{cv_{S_\Gamma}} = \int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{v}}div\overline{\mathbf{D}}\overline{\mathbf{n}}dA = \int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{v}}\rho_v\overline{\mathbf{n}}dA$ – curentul electric de convecție;

$i_{D_{S_\Gamma}} = \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \overline{\mathbf{D}}}{\partial t}\overline{\mathbf{n}}dA$ – curentul de deplasare. El exprimă cantitativ faptul că un câmp electric variabil în timp determină efecte magnetice, adică produce un câmp magnetic.

$$i_{R_{S_\Gamma}} = \int_{S_\Gamma} rot(\overline{\mathbf{D}} \times \overline{\mathbf{v}})\overline{\mathbf{n}}dA = \oint_\Gamma (\overline{\mathbf{D}} \times \overline{\mathbf{v}})\overline{\mathbf{dl}}$$ – curentul Röentgen.

<u>OBS</u>: 1) *Curentul electric de conducție este fenomenul de deplasare a purtătorilor de sarcină de la un atom la altul în conductoare (electroni în materiale conductoare de speța I și ioni în materiale conductoare de speța a II-a).*

2) Curentul electric de convecție este dat de deplasarea corpurilor încărcate cu sarcină electrică (inclusiv a particulelor elementare electron sau proton, dar nu de la un atom la altul ci pe întreg traseul curentului de convecție – de exemplu, fasciculele de electroni sau de protoni).

3) *Curentul electric de deplasare este dat de variația în timp a câmpului electric – de exemplu, între armăturile unui condensator, odată cu variația, după aceeași lege a sarcinii electrice pe armături).*

4) *În practică, expresia dată de teoria macroscopică a electromagnetismului nu se verifică pentru curentul Röentgen (acest aspect este considerat unul dintre marile limitări ale teoriei macroscopice). Experimental, în locul inducției electrice* $\overline{\mathbf{D}}$ *din expresia densității curentului electric Roentgen trebuie să apară polarizația electrică* $\overline{\mathbf{P}}$ *(din expresia legii legăturii în câmp electric* $\overline{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \overline{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{P}}$ *). Deci curentul Roentgen trebuie interpretat ca fiind produs de corpuri polarizate electric aflate în mișcare de rotație.*

B. Formele locale ale legii

Pentru domenii de continuitate și netezime a proprietăților, cu ajutorul teoremei lui Stokes se obține o primă formă locală a legii:

$$rot\overline{\mathbf{H}} = \overline{\mathbf{J}} + \frac{\partial \overline{\mathbf{D}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}}\rho_v + rot(\overline{\mathbf{D}} \times \overline{\mathbf{v}})$$

Pentru medii imobile $(\overline{\mathbf{v}} = 0)$ se obține forma locală:

$$rot\overline{\mathbf{H}} = \overline{\mathbf{J}} + \frac{\partial \overline{\mathbf{D}}}{\partial t}$$ *numită prima ecuație a lui Maxwell*

În cazul suprafețelor de discontinuitate pentru proprietățile câmpului magnetic şi medii imobile:

$$rot_s \overline{\mathbf{H}} = \overline{\mathbf{t}} \times (\overline{\mathbf{H}}_2 - \overline{\mathbf{H}}_1) = 0 \Rightarrow H_{2t} = H_{1t}$$

adică, la traversarea unei suprafețe de discontinuitate de către liniile câmpului magnetic, se conservă întotdeauna componenta tangențială a intensității acestui câmp.

C. Teorema refracției liniilor de câmp magnetic

Enunț: La trecerea liniei de câmp magnetic prin suprafața de separație a două medii liniare, omogene și izotrope, diferite din punct de vedere magnetic, aceasta se frânge astfel încât raportul tangentelor unghiurilor făcute de câmp cu normala la suprafață este egal cu raportul permeabilităților relative ale celor două materiale:

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\frac{H_{1t}}{H_{1n}}}{\frac{H_{2t}}{H_{2n}}} = \frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\frac{B_{2n}}{\mu_2}}{\frac{B_{1n}}{\mu_1}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

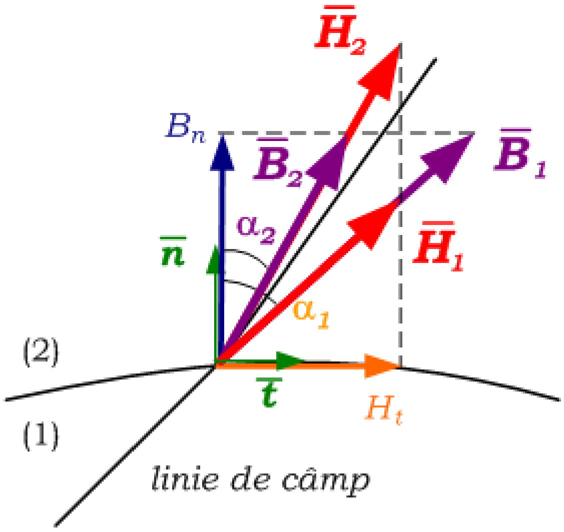

Fig. 5.2. Conservarea componentei tangențiale a intensității câmpului magnetic și a componentei normale a inducției magnetice.

Dacă materialul 1 este feromagnetic, iar materialul 2 este aer, deci $\mu_{r1} >> \mu_{r2} \approx 1$ rezultă că:

a) $tg\alpha_2 << 1$ deci $\alpha_2 \to 0$ cu următoarea interpretare: *În aer liniile de câmp magnetic sunt practic normale la suprafața materialului feromagnetic*;

b) $tg\alpha_1 >> 1$ deci $\alpha_1 \to \pi/2$ cu următoarea interpretare: *În mediu feromagnetic liniile de câmp magnetic sunt practic tangențiale la suprafața materialului; materialul feromagnetic „canalizează" liniile de câmp magnetic*.

D. Teorema potențialului magnetostatic

În regim magnetostatic (mărimile nu variază în timp și nu există transformări energetice – $\overline{\mathbf{J}} = 0$), legea capătă forma:

$$u_{mm_\Gamma} = \oint_\Gamma \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} = 0 \Rightarrow rot\overline{\mathbf{H}} = 0$$

ultimă formă care justifică introducerea unei mărimi scalare V_m, în funcție de punct, numită *potențial magnetostatic*:

$$\overline{\mathbf{H}} = -\,grad\,V_m \quad \text{sau} \quad dV_m = -\overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}}$$

Integrând această relație între un punct arbitrar M_0 și un punct oarecare M, rezultă relația de definiție a potențialului magnetic scalar:

$$V_{mM} = V_{mM_0} - \int_{M_0}^{M} \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} = V_{mM_0} + \int_{M}^{M_0} \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}}$$

Potențialul magnetic într-un punct se măsoară în amperi, este o mărime relativă la un punct de referință ales arbitrar în care valoarea potențialului magnetic este de asemenea arbitrară.

Pe o curbă închisă oarecare Γ dacă se aleg opțional pozițiile a două puncte A și B, legea circuitului magnetic se scrie:

$$\oint_{\Gamma} \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} = \int_{AB(C_1)} \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} + \int_{BA(C_2)} \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} = \int_{AB(C_1)} \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} - \int_{AB(C_2)} \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} = 0$$

adică tensiunea magnetică între două puncte este aceeași pe orice curbă:

$$u_{m\,AB(C_1)} = u_{m\,AB(C2)} = V_{mA} - V_{mB}$$

Dacă se consideră curba *Γ* ca o înlănțuire de curbe deschise C_k, relația devine:

$$\oint_{\Gamma} \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} u_{mC_k} = 0$$

Această relație este numită *teorema a II-a Kirchhoff* pentru circuite magnetice și are enunțul: *Suma algebrică a tensiunilor magnetice în lungul unei curbe închise Γ este nulă*.

E. Teorema lui Ampére

În regimul staționar al câmpului magnetic, mărimile fiind invariabile în timp, legea circuitului magnetic capătă forma:

$$u_{mm\Gamma} = \oint_{\Gamma} \overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{dl}} = i_{S_{\Gamma}}$$

numită *teorema lui Ampére*. Pe domenii de continuitate forma locală corespunzătoare este:

$$rot\,\overline{\mathbf{H}} = \overline{\mathbf{J}}$$

F. Relația Biot-Savart-Laplace

Aceasta este relația ce ajută la determinarea intensității câmpului magnetic (sau a inducției magnetice) pornind de la legea circuitului magnetic. Se pornește de la teorema lui Ampére și se consideră conductoare dispuse într-un mediu magnetic omogen și infinit extins.

$$rot\,\overline{\mathbf{H}} = rot\left(\frac{1}{\mu}\overline{\mathbf{B}}\right) = \frac{1}{\mu} rot(rot\overline{\mathbf{A}}) = \frac{1}{\mu}\left(grad\,div\overline{\mathbf{A}} - \Delta\overline{\mathbf{A}}\right)$$

folosind relația de etalonare a câmpului magnetic ($div\overline{A} = 0$), se obține:

$$rot\,\overline{\mathbf{H}} = -\frac{1}{\mu}\Delta\overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{J}} \quad \Rightarrow \quad \Delta\overline{\mathbf{A}} = -\mu \cdot \overline{\mathbf{J}}$$

Aceasta este o ecuație de tip Poisson ce are soluția de forma:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V\Sigma} \frac{\overline{\mathbf{J}}}{r} dV$$

Revenind cu $\overline{\mathbf{A}}$ în formula intensității câmpului magnetic:

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} rot\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_\Sigma} \left(grad\frac{1}{r}\right) \times \overline{\mathbf{J}} dV \;=>\; \overline{\mathbf{H}} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_\Sigma} \frac{\overline{\mathbf{J}} \times \overline{\mathbf{r}}}{r^3} dV$$

Dacă avem un conductor filiform parcurs de curentul i, elementul de volum poate fi scris $dV = A\overline{\mathbf{n}}\overline{\mathbf{dl}}$:

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{1}{4\pi}\int_{V_\Sigma} \frac{\overline{\mathbf{J}} \times \overline{\mathbf{r}}}{r^3}(A\overline{\mathbf{n}}\overline{\mathbf{dl}}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V_\Sigma} \frac{\overline{\mathbf{dl}} \times \overline{\mathbf{r}}}{r^3}(A \cdot J) = \frac{i}{4\pi}\oint_{\Gamma} \frac{\overline{\mathbf{dl}} \times \overline{\mathbf{r}}}{r^3}$$

5.2. Legea inducției electromagnetice

În 1831, Michael Faraday a pus în evidență pe cale experimentală fenomenul inducției electromagnetice. El a efectuat o serie de teste demonstrând următoarele:

- prin variația unui câmp magnetic în care se introduce un conductor fix se induce tensiune;
- dacă se deplasează cu o viteză un conductor într-un câmp magnetic constant se induce tensiune;
- dacă există un sistem fix într-un câmp magnetic, dar se variază permeabilitatea magnetică a mediului se induce tensiune.

A. Forma generală integrală

Enunț: Tensiunea electromotoare indusă în lungul unei curbe închise (Γ) este egală cu viteza de scădere în timp a fluxului magnetic prin orice suprafață deschisă (S_Γ), mărginită de această curbă:

$$e_\Gamma = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_{s_\Gamma}$$

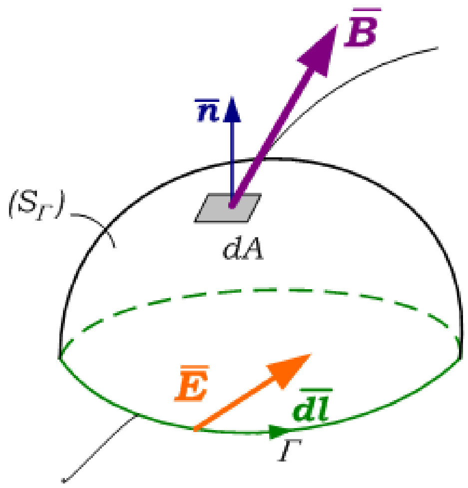

Fig. 5.3. Explicativă pentru legea inducției electromagnetice.

sau sub formă integrală:

$$\oint_\Gamma \overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \cdot dA$$

<u>OBS</u>: Alături de legea fluxului electric, această lege se referă la posibilitățile concrete de producere a unui câmp electric.

Membrul drept este o derivată de flux ce poate fi ataşată unei suprafeţe ce se deplasează cu viteza $\overline{\mathbf{v}}$, astfel încât termenul poate fi dezvoltat:

$$\int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \cdot dA = -\int_{S_\Gamma} \left[\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}} div \overline{\mathbf{B}} + rot(\overline{\mathbf{B}} \times \overline{\mathbf{v}}) \right] \overline{\mathbf{n}} dA$$

Al doilea termen al dezvoltării este nul, ţinând cont de legea fluxului magnetic (forma locală, $div\overline{\mathbf{B}} = 0$); de asemenea, al treilea termen se transformă cu teorema lui Stokes, astfel încât legea inducţiei capătă forma:

$$\oint_\Gamma \overline{\mathbf{E}}\overline{\mathbf{dl}} = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} \overline{\mathbf{n}} dA + \oint_\Gamma \left(\overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathbf{B}} \right) \overline{\mathbf{dl}}$$

Aceşti doi termeni sunt cei corespunzători celor două fenomene puse în evidenţă de Faraday:

$e_{\Gamma,t} = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} \overline{\mathbf{n}} dA$ – t.e.m. indusă prin transformare (pulsaţie);

$e_{\Gamma,m} = \oint_\Gamma \left(\overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathbf{B}} \right) \overline{\mathbf{dl}}$ – t.e.m. indusă prin mişcare.

B. Forme locale

Pentru domenii de continuitate şi netezime a tuturor mărimilor, aplicând membrului stâng al ultimei forme teorema lui Stokes, rezultă:

$$\int rot\overline{\mathbf{E}}\overline{\mathbf{n}}dA = -\int_{S_\Gamma} \left[\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} + rot(\overline{\mathbf{B}} \times \overline{\mathbf{v}}) \right] \overline{\mathbf{n}} dA \Rightarrow rot\overline{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} + rot(\overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathbf{B}})$$

sau dacă mediile sunt imobile ($\overline{\mathbf{v}} = 0$):

$$rot\overline{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t}$$ *numită a doua ecuaţie a lui Maxwell*

Pentru suprafeţe de discontinuitate se alege curba *Γ*, formată din curbele deschise C_1 şi C_2, ce cuprinde această suprafaţă:

$$\oint_\Gamma \overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} = \int_{C_1} \overline{\mathbf{E}}_1 \cdot \overline{\mathbf{dl}} + \int_{C_2} \overline{\mathbf{E}}_2 \cdot \overline{\mathbf{dl}} = \overline{\mathbf{E}}_1 \cdot \overline{\mathbf{t}} \cdot \Delta l - \overline{\mathbf{E}}_2 \cdot \overline{\mathbf{t}} \cdot \Delta l = \left(\overline{\mathbf{E}}_1 - \overline{\mathbf{E}}_2 \right) \cdot \overline{\mathbf{t}} \Delta l \cong 0$$

Rezultă astfel că: $\left(\overline{\mathbf{E}}_1 - \overline{\mathbf{E}}_2 \right) \cdot \overline{\mathbf{t}} = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$,

adică, rezultă că traversarea oricărei suprafeţe de discontinuitate de către liniile de câmp electric se face cu conservarea componentei tangenţiale a intensităţii câmpului.

C. Teorema refracţiei liniilor de câmp electric

Enunţ: La traversarea unei suprafeţe de discontinuitate neîncărcate electric, raportul tangentelor unghiurilor de incidenţă ale liniei de câmp este egal cu raportul valorilor locale ale permitivităţii dielectrice din imediata vecinătate a punctului de traversare.

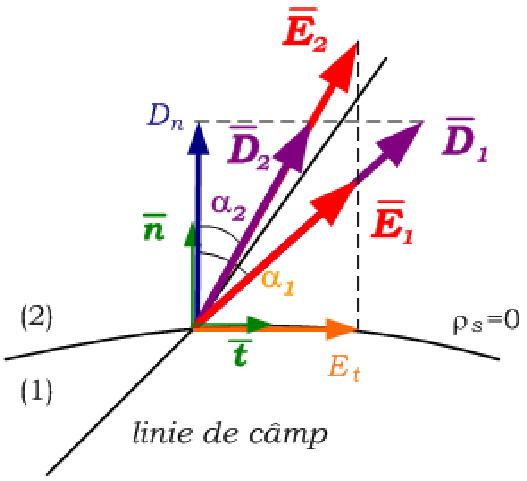

Fig. 5.4. Conservarea componentei normale a inducției electrice și a componentei tangențiale a intensității câmpului electric.

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\dfrac{E_{1t}}{E_{1n}}}{\dfrac{E_{2t}}{E_{2n}}} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\dfrac{D_{2n}}{\varepsilon_2}}{\dfrac{D_{1n}}{\varepsilon_1}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

D. Teorema refracției liniilor de curent de conducție

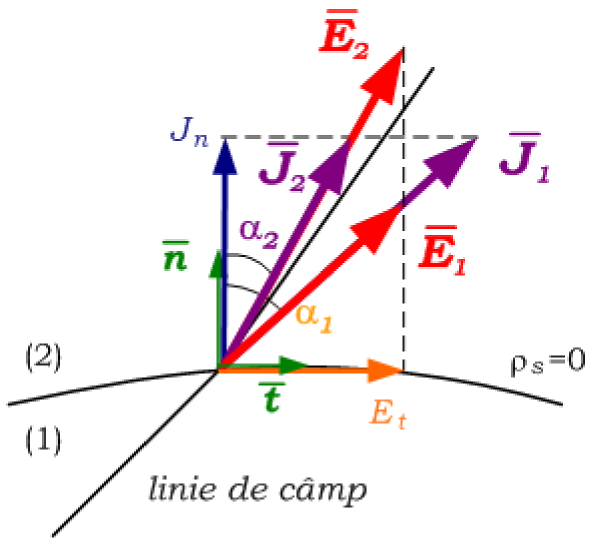

Fig. 5.5. Conservarea componentei normale a densității curentului electric de conducție și a componentei tangențiale a intensității câmpului electric.

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\dfrac{J_{1t}}{J_{1n}}}{\dfrac{J_{2t}}{J_{2n}}} = \frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\sigma_1 \cdot E_{1t}}{\sigma_2 \cdot E_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

Enunț: La traversarea unei suprafețe de discontinuitate neîncărcate electric, raportul tangentelor unghiurilor de incidență ale liniei de câmp este egal cu raportul valorilor locale ale conductivități lor electrice din imediata vecinătate a punctului de traversare.

E. Teorema potențialului electrostatic

În regim electrostatic, mărimile sunt invariabile în timp:

$$e_{\Gamma} = \oint_{(\Gamma)} \overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} = 0$$

Enunț: Tensiunea electromotoare t.e.m. în lungul oricărei curbe închise (Γ) este întotdeauna nulă.

Considerând curba închisă (Γ) ca alcătuită dintr-un lanț continuu de curbe deschise (C_k), relația precedentă devine:

$$\sum_{(C_k)\in\Gamma} u_{c_k} = 0$$

consecință care poartă denumirea de *a doua teoremă a lui Kirchhoff.*

Dacă curba (Γ) e formată din numai două asemenea curbe deschise (C_1) si (C_2), de extremitățile comune *A* și *B*, rezultă: $U_{AB(C_1)} - U_{AB(C_2)} = 0$, cu alte cuvinte, tensiunea electrică între două puncte nu depinde de curba folosită pentru integrare.

Din forma locală a legii pentru domenii de continuitate, $rot\overline{\mathbf{E}} = 0$, rezultă că în acest caz câmpul electrostatic este un câmp de vectori iraționali şi poate fi exprimat prin relația:

$$\overline{\mathbf{E}} = -gradV \ ,$$

în care mărimea scală *V* se numește *potențial electrostatic*.

$$dV = -\overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} \Rightarrow V_M = V_{M_0} + \int_M^{M_0} \overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} \quad \text{sau} \quad V_M = \int_M^{\infty} \overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{dl}}$$

Integrând relația anterioară între două puncte *A* și *B*, rezultă: $U_{AB} = V_A - V_B$, ceea ce arată că tensiunea electrică între două puncte este egală cu diferența valorilor potențialelor celor două puncte.